

Olimpiada Matemática San Francisco de Asís

COLEGIO:

APELLIDOS Y NOMBRES:.....

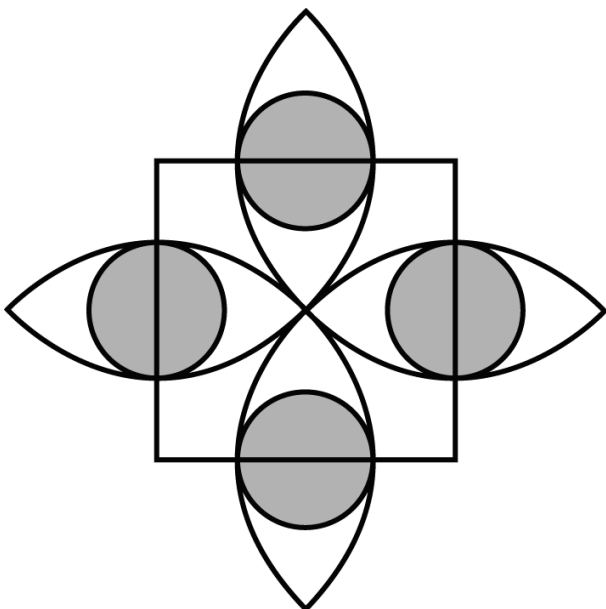


Nivel 4:

Olimpiada Matemática San Francisco de Asís –
2015
Nivel 4

- La duración de esta prueba es de dos horas como máximo.
- Las resoluciones deben realizarse con lapicera de tinta azul o negra.
- Deben utilizarse las hojas entregadas para la competencia. No se aceptarán hojas anexas.
- Los razonamientos y cálculos que intervienen en la resolución de los problemas propuestos deben constar en la hoja de la prueba.
- No se responderán preguntas sobre los problemas.
- Recordar que los celulares deben permanecer apagados

Situación problemática N°1



En la figura, la longitud del lado del cuadrado es 2cm, las semicircunferencias pasan por el centro del cuadrado y tienen sus centros en los vértices del mismo, y los círculos sombreados tienen centros en los lados del cuadrado y son tangentes a las semicircunferencias.
¿Cuál es la medida del área sombreada?

Situación problemática N°2

Un hombre le dijo a otro: “Cuando yo tenía la edad que tú tienes hoy, nuestras edades sumaban 50 años”. A lo que el otro respondió: “Y cuando yo tenga la edad que tú tienes hoy, nuestras edades sumarán 66 años”.

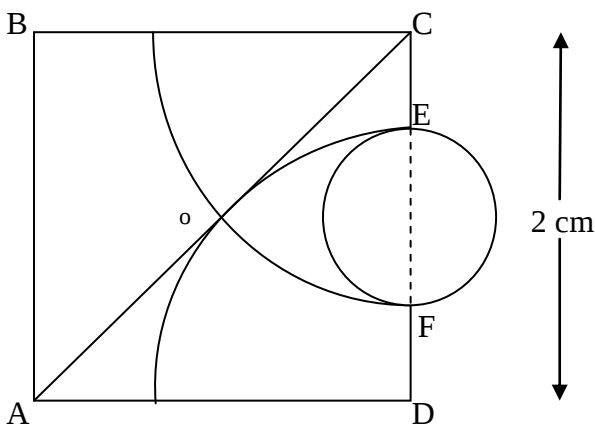
¿Qué edad tenía cada uno de ellos en el momento de este diálogo?

Situación problemática N°3

Se forma un número de cuatro dígitos $abcd$ de tal manera que sus dígitos a, b, c y d son distintos y pertenecen al conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. ¿Cuántos de estos números tienen la propiedad de que la suma $a.b + b.c + c.d + d.a$, es divisible por 3?

SOLUCIÓN

Situación problemática N°1



La diagonal del cuadrado:

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{CD})^2$$

$$(\overline{AC})^2 = 2^2 + 2^2 =$$

$$\overline{AC} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}cm$$

$$\overline{OC} = \overline{CF} = \overline{ED} = \text{radio} = \sqrt{2}cm$$

$$\overline{CE} = \overline{FD} = \overline{CD} - \overline{ED} = 2cm - \sqrt{2}cm$$

$$\overline{EF} = \overline{CD} - 2\overline{CE}$$

$$\overline{EF} = 2cm - 2(2 - \sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} - 1)$$

$\Rightarrow$ radio de circunferencia pequeña es $r = \sqrt{2} - 1 cm$

Luego el área de una circunferencia es $A = r^2 \cdot \pi = (\sqrt{2} - 1)^2 \cdot \pi = (3 - 2\sqrt{2})\pi cm^2$

Total Área sombreada = $4 \cdot (3 - 2\sqrt{2})\pi cm^2$

Situación problemática N°2

Al momento de la conversación $x > y$

Diferencia de edad=tiempo transcurrido $x - y$

Cuando yo tenía la edad que tú tienes hoy, nuestras edades sumaban 50 años"

$$\begin{aligned} x - (x - y) + y - (x - y) &= 50 \\ 3y - x &= 50 \end{aligned}$$

Y cuando yo tenga la edad que tú tienes hoy, nuestras edades sumarán 66 años".

$$\begin{aligned} y + (x - y) + x + (x - y) &= 66 \\ 3x - y &= 66 \end{aligned}$$

$$3y - 50 = x$$

$$x = \frac{66 + y}{3}$$

$$3y - 50 = \frac{66 + y}{3}$$

$$y = 27 \quad y \quad x = 31$$

Situación problemática N°3

El número 3 puede ocupar cualquier posición, supongamos primero que $a = 3$

Si $a = 3 \Rightarrow a.b$ y $a.d$ son $\dot{3}$

Entonces $b.c + c.d$ deben ser $\dot{3} \Rightarrow c.(b + d)$ debe ser $\dot{3}$

Si $c = 1$ $b = 2$ y $d = 4$ se cumple Ó $b = 4$ y $d = 2$ se cumple Es decir dos números posibles 3.214 y 3.412	Si $c = 4$ $b = 1$ y $d = 2$ se cumple Ó $b = 2$ y $d = 1$ se cumple Es decir dos números posibles 3.142 y 3.241	Si $c = 2$ $b = 1$ y $d = 4$ no se cumple Pues la suma no es múltiplo de 3
---	---	--

Por lo tanto existen 4 posibilidades en cada posición del número 3, en consecuencia la cantidad de números que pueden formarse son $4.4 = 16$